Раздел 3. Тема 3. Занятие 2.

Лемма Жордана:

1. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области $D=\{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq a\}$, соответственно $D=\{z: |z|\geq R_0, \operatorname{Im} z \leq a\}$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $z \in D$. Если $m>0$, соответственно $m<0$, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)dz = 0$$

где γ_R – дуга окружности $\{z: |z|=R\}$, лежащая в этой же области D.

2. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области $D=\{z: |z|\geq R_0, \operatorname{Re} z \geq a\}$, соответственно $\{z: |z|\geq R_0, \operatorname{Re} z \leq a\}$ и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Если $t>0$, соответственно $t<0$, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{-tz} f(z)dz = 0.$$

где γ_R – дуга окружности $\{z: |z|=R\}$ лежащая в этой области.

Лемма 1:

Пусть функция $R(\cos\varphi, \sin\varphi)$ является рациональной относительно аргументов $\cos\varphi, \sin\varphi$, то

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \tilde{R}(z)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – особые точки функции $\tilde{R}(z)$, лежащие в круге $\{z: |z|<1\}$, а функция $\tilde{R}(z)$ имеет вид:

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]\right)$$

и является рациональной относительно z.

Лемма 2:

Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $\operatorname{Im} z \geq 0$, аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $z f(z) \to 0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Тогда справедливо

равенство:
$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Лемма 3

Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n$ и $f(z) \longrightarrow 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда справедливо равенство:
$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left(e^{iaz} f(z)\right),\ a>0.$$

Лемма 4

Пусть функция $f(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек $a_1, \dots, a_n$, и аналитична на действительной прямой, кроме простых полюсов $b_1, \dots, b_m$ и $f(z) \longrightarrow 0$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда при $a > 0$ справедливо равенство:
$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k}\left(e^{iaz} f(z)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=b_k}\left(e^{iaz} f(z)\right) \right\}.$$

Семинар 12

(12.13) Вычислить интегралы:

1) $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$, $a>1$.

Для $|z|=1$ имеем: $\cos\varphi=\frac{z+1/z}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$,

$$z=e^{i\varphi}\Rightarrow dz=ie^{i\varphi}d\varphi\Rightarrow d\varphi=-i\frac{dz}{z}\Rightarrow$$

$$I=-2i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}=-2i\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_2}f(z),\text{ где } f(z)=\frac{1}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0\Rightarrow\frac{D}{4}=a^2-1>0\Rightarrow \left.\begin{aligned}z_1&=-a-\sqrt{a^2-1}\\ z_2&=-a+\sqrt{a^2-1}\end{aligned}\right\}\text{ полюсы первого порядка}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2}f(z)=\left.\frac{1}{2z+2a}\right|_{z=z_2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\Rightarrow I=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

2) $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, $a>b>0$

Для $|z|=1$ имеем: $\cos\varphi=\frac{z+1/z}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$;

$$z=e^{i\varphi}\Rightarrow dz=ie^{i\varphi}d\varphi\Rightarrow d\varphi=-i\frac{dz}{z}\Rightarrow$$

$$I=-4i\oint\limits_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2}=-4i\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_2}f(z),\text{ где } f(z)=\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$$

$$bz^2+2az+b=0\Rightarrow\frac{D}{4}=a^2-b^2>0\Rightarrow \left.\begin{aligned}z_1&=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\\ z_2&=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\end{aligned}\right\}\text{ полюсы второго порядка}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2}f(z)=\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{b^2(z-z_1)^2}\right)=-\frac{1}{b^2}\lim_{z\to z_2}\frac{z+z_1}{(z-z_1)^3}=-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3}=\frac{a}{4(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$I=8\pi\cdot\frac{a}{4(a^2-b^2)^{3/2}}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

3) $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi}=\int\limits_0^{\pi}\frac{2d\varphi}{3-\cos2\varphi}=|\psi=2\varphi|=\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi}{3-\cos\psi}$

Для $|z|=1$ имеем: $\cos\psi = \dfrac{z+1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$;

$$z=e^{i\psi} \Rightarrow dz = ie^{i\psi}d\psi \Rightarrow d\psi = -i\,\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$I = 2i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-6z+1} = 2i\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z), \text{ где } f(z)=\frac{1}{z^2-6z+1}$$

$$z^2-6z+1=0 \Rightarrow D=8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1 = 3-2\sqrt{2} \\ z_2 = 3+2\sqrt{2}\end{matrix}\right\} \text{ полюса первого порядка}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=z_1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \Rightarrow I = -4\pi\cdot\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

4) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{(1+a^2)-2a\cos\psi}$, $a \neq \pm 1$.

Для $|z|=1$ имеем: $\cos\psi = \dfrac{z+1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$;

$$z=e^{i\psi} \Rightarrow dz = ie^{i\psi}d\psi \Rightarrow d\psi = -i\,\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$I = i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(1+a^2)z+a} = i\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z), \text{ где } f(z)=\frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}$$

$$az^2-(1+a^2)z+a=0 \Rightarrow D=(1-a^2)^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1 = a \\ z_2 = \dfrac{1}{a}\end{matrix}\right\} \text{ полюса первого порядка}$$

Рассмотрим случай $|a|<1$, поскольку случай $|a|>1$ исследуется аналогично.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{1}{2az-(1+a^2)}\right|_{z=z_1} = -\frac{1}{1-a^2} \Rightarrow I = -2\pi\cdot\left(-\frac{1}{1-a^2}\right) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

6) $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$, $0<a<1$. $\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{(2-a)+a\cos 2\varphi}\,d\varphi = |\psi = 2\varphi| =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\psi}{(2-a)+a\cos\psi}\,d\psi$$

Для $|z|=1$ имеем: $\cos\psi = \dfrac{z+1/z}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$;

$$z=e^{i\psi} \Rightarrow dz = ie^{i\psi}d\psi \Rightarrow d\psi = -i\,\frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$I = -\frac{i}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z+1)^2\,dz}{z(az^2+2(2-a)z+a)} = -\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right),$$

где $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{z(az^2+2(2-a)z+a)}$

$$az^2+2(2-a)z+a=0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 4(1-a) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1 = -\dfrac{(1+\sqrt{1-a})^2}{a} \\ z_2 = -\dfrac{(1-\sqrt{1-a})^2}{a}\end{array}\right\} \text{полюсы первого порядка}$$

$z=0$ – полюс первого порядка

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{1}{a}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \left.\frac{(z+1)^2/z}{2az+2(2-a)}\right|_{z=z_2} = \frac{(z_2+1)^2}{2z_2(az_2+(2-a))} = -\frac{\sqrt{1-a}}{a} \Rightarrow$$

$$I = \pi\left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1-a}}{a}\right) = \pi\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}.$$

(12.16) Вычислить интегралы:

1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4z+13)^2}$

$$z^2+4z+13=0 \Rightarrow D=-9 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1 = -2-3i \\ z_2 = -2+3i\end{array}\right\} \text{полюсы второго порядка}$$

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right) = -\lim_{z\to z_2}\frac{z+z_1}{(z-z_1)^3} = -\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3} = \frac{i}{54} \Rightarrow$$

$$I = 2\pi i\cdot\frac{i}{54} = -\frac{\pi}{27}.$$

2) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$

$$z^4+1=0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}},\ k=\overline{0,3} \Rightarrow$$

$$\underbrace{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},\quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}},\quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}}_{\text{полюсы первого порядка}}$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$I = \pi i\left(\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{8}} - i\frac{\sqrt{2}}{8} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{8}} - i\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

4) $$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2},\ a>0 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$

$$z^2+a^2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z_1 = -ia \\ z_2 = ia\end{matrix}\right\} \text{полюсы второго порядка}$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-z_1)^2}\right) = -2\lim_{z\to z_2}\frac{z_1 z}{(z-z_1)^3} = -\frac{2z_1z_2}{(z_2-z_1)^3} = -\frac{i}{4a}$$

$$I = \pi i\left(-\frac{i}{4a}\right) = \frac{\pi}{4a}.$$

5) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\ a>0, b>0.$$

Если $a=b$ рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$

$z_1 = -ia$, $z_2 = ia$ — полюсы второго порядка

$$I = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-z_1)^2}\right) = -2\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(z-z_1)^3} = -\frac{2}{(z_2-z_1)^3} = -\frac{i}{4a^3}$$

$$I = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4a^3}\right) = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Для $a \neq b$ имеем $I = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+b^2}\right)$

Рассмотрим интеграл $I_* = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+c^2}$, $c>0$ и для него определим функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+c^2}$

$z_1 = -ic$, $z_2 = ic$ – полюсы первого порядка

$$I_* = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{2z_2} = -\frac{i}{2c} \Rightarrow I_* = 2\pi i\left(-\frac{i}{2c}\right) = \frac{\pi}{c} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{b}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

12.23 Вычислить интегралы в смысле главного значения:

1) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx$

Для $a>0$ $\quad I = \pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^{iaz}}{z} = \pi i\cdot \left.e^{iaz}\right|_{z=0} = \pi i$

Для $a<0$ $\quad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i|a|x}}{x}dx = |y=-x| = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|a|y}}{y}dy = -\pi i$

2) $$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-5x+6}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{-ix}}{x^2-5x+6}dx = |y=-x| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-5x+6}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ye^{iy}}{y^2+5y+6}dy =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\operatorname*{res}_{z=2}\frac{ze^{iz}}{z^2-5z+6} + \operatorname*{res}_{z=3}\frac{ze^{iz}}{z^2-5z+6}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{ze^{iz}}{z^2+5z+6} + \operatorname*{res}_{z=-3}\frac{ze^{iz}}{z^2+5z+6}\right) =$$

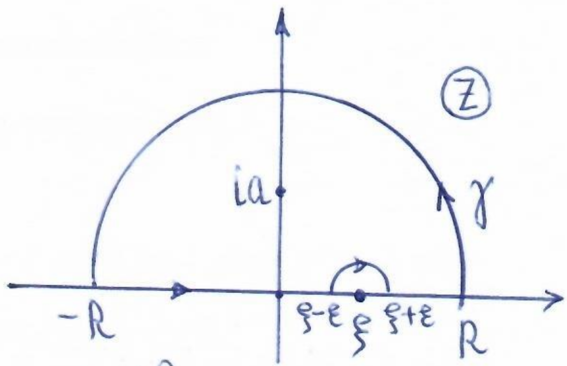
$$= \frac{\pi i}{2}\left(\left.\frac{ze^{iz}}{z-3}\right|_{z=2} + \left.\frac{ze^{iz}}{z-2}\right|_{z=3}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(\left.\frac{ze^{iz}}{z+3}\right|_{z=-2} + \left.\frac{ze^{iz}}{z+2}\right|_{z=-3}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(-2e^{2i} + 3e^{3i}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(-2e^{-2i} + 3e^{-3i}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(-2e^{2i} + 2e^{-2i}\right) +$$

$$+\frac{\pi i}{2}\left(3e^{3i}-3e^{-3i}\right)=-2\pi i\,\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}+3\pi i\,\frac{e^{3i}-e^{-3i}}{2}=$$

$$=2\pi\sin 2-3\pi\sin 3=\pi\,(2\sin 2-3\sin 3)$$

3) $I=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)}$, $a>0$, $\xi\in\mathbb{R}$.



Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z-\xi)}$

в области $\{z\in\mathbb{C}: |z|<R, \operatorname{Im}z\geq 0\}\setminus$

$\setminus\{z\in\mathbb{C}: |z|<\varepsilon, \operatorname{Im}z\geq 0\}$, где $|\xi|<R$ и $a<R$.

В этой области функция $f(z)$ является аналитической всюду кроме точки $z=ia$ – полюса первого порядка $\Rightarrow$

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=ia} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=ia} f(z)=\lim_{z\to ia}\frac{1}{(z+ia)(z-\xi)}=\frac{1}{2ia(ia-\xi)}\Rightarrow\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=\frac{-\pi}{a(\xi-ia)}$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{-R}^{\xi-\varepsilon}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{R}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)}+\int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im}z\geq 0}}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z-\xi)}+\int\limits_{\substack{|z-\xi|=\varepsilon\\ \operatorname{Im}z\geq 0}}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z-\xi)}=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

Для интеграла I_3 имеем:

$$|I_3|\leq\int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im}z\geq 0}}\frac{|dz|}{|z^2+a^2|\cdot|z-\xi|}\leq\int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im}z\geq 0}}\frac{|dz|}{(|z|^2-a^2)(|z|-|\xi|)}=\int\limits_0^{\pi}\frac{R\,d\varphi}{(R^2-a^2)(R-|\xi|)}=$$

$$=\frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R-|\xi|)}$$

Значит, при $R\to+\infty$ интеграл I_3 стремится к нулю.

Для интеграла I_4 имеем $z=\xi+\varepsilon e^{i\varphi}$, $dz=i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi$ $\Rightarrow$

$$I_4=i\int_{\pi}^{0}\frac{\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi}{((\xi+\varepsilon e^{i\varphi})^2+a^2)\,\varepsilon e^{i\varphi}}=-i\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{((\xi+\varepsilon e^{i\varphi})^2+a^2)}$$

При $\varepsilon\to+0$ интеграл I_4 стремится к величине $-\frac{\pi i}{\xi^2+a^2}$.

Устремляя одновременно $\varepsilon\to+0$ и $R\to+\infty$ находим:

$$-\frac{\pi}{a(\xi-ia)}=I-\frac{\pi i}{\xi^2+a^2}\Rightarrow I=\frac{\pi i}{\xi^2+a^2}-\frac{\pi(\xi+ia)}{a(\xi^2+a^2)}=-\frac{\pi\xi}{a(\xi^2+a^2)}.$$

5) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^3+1}dx$. Считаем, что $a>0$.

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^3+1}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}}{x^3+1}dx=|-x=y|=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^3+1}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iay}}{y^3-1}.$$

Особые точки у функции $\frac{e^{iaz}}{z^3+1}$ – это $\sqrt[3]{-1}$: $z=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}$, $k=\overline{0,2}$

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=e^{i\pi}=-1,\ z_3=e^{i\frac{5\pi}{3}}\text{ – полюсы первого порядка}$$

Особые точки у функции $\frac{e^{iaz}}{z^3-1}$ – это $\sqrt[3]{1}$: $z=e^{i\frac{2\pi k}{3}}$, $k=\overline{0,2}$

$$z_4=e^{i\cdot 0}=1,\ z_5=e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_6=e^{i\frac{4\pi}{3}}\text{ – полюсы первого порядка}$$

$$I=\frac{\pi i}{2}\operatorname*{res}_{z=z_2}\frac{e^{iaz}}{z^3+1}-\frac{\pi i}{2}\operatorname*{res}_{z=z_4}\frac{e^{iaz}}{z^3-1}+\pi i\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{e^{iaz}}{z^3+1}-\pi i\operatorname*{res}_{z=z_5}\frac{e^{iaz}}{z^3-1}=$$

$$=\frac{\pi i}{2}\left.\frac{e^{iaz}}{3z^2}\right|_{z=z_2}-\frac{\pi i}{2}\cdot\left.\frac{e^{iaz}}{3z^2}\right|_{z=z_4}+\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{3z^2}\right|_{z=z_1}-\pi i\left.\frac{e^{iaz}}{3z^2}\right|_{z=z_5}=$$

$$=\underbrace{\frac{\pi i}{6}\left(e^{-ia}-e^{ia}\right)}_{I_1}+\underbrace{\pi i\frac{e^{iaz_1}}{3z_1^2}-\pi i\frac{e^{iaz_5}}{3z_5^2}}_{I_2}=I_1+I_2$$

$$I_1=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}=\frac{\pi}{3}\sin a.$$

$$I_2=\frac{\pi i}{3}\left(e^{ia\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}\right)}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}-e^{ia\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}\right)}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{3}e^{-\frac{\sqrt3}{2}a}\left(\left(\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt3}{2}\right)-\left(\cos\frac{a}{2}-i\sin\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}\right)\right)=$$

$$= -\frac{\pi i}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a} \cdot i\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right) = \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{\pi}{3}\left(\sin a + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)\right).$$

12.18 Вычислить интегралы:

1) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{-ix}}{x^2-2x+10}dx =$$

$$= \left|y=-x\right| = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ye^{iy}}{y^2+2y+10}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=1+3i}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10} - \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1+3i}\frac{ze^{iz}}{z^2+2z+10} =$$

$$= \pi i\left(\left.\frac{ze^{iz}}{2z-2}\right|_{z=1+3i} - \left.\frac{ze^{iz}}{2z+2}\right|_{z=-1+3i}\right) =$$

$$= \frac{\pi \cancel{i} e^{-3}}{2\cdot 3\cancel{i}}\left((1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) - (-1+3i)(\cos 1 - i\sin 1)\right) =$$

$$= \frac{\pi e^{-3}}{6}(2\cos 1 - 2\cdot 3\sin 1) = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3\sin 1).$$

2) $$I = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx =$$

$$= -\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{ze^{iz}}{z^4+1} + \operatorname*{res}_{z=z_2}\frac{ze^{iz}}{z^4+1}\right) = (*)$$

$$z^4+1=0 \Rightarrow \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}},\ k=\overline{0,3}$$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ – полюсы первого порядка

$$(*) = \pi\left(\left.\frac{ze^{iz}}{4z^3}\right|_{z=z_1} + \left.\frac{ze^{iz}}{4z^3}\right|_{z=z_2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{iz_1}}{z_1^2} + \frac{e^{iz_2}}{z_2^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4i}\left(e^{iz_1} - e^{iz_2}\right) = -\frac{\pi i}{4}\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot 2i\sin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx$, $a\neq 0$. Считаем, что $a>0$.

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,\underset{z=ia}{\operatorname{res}} f(z),\ \text{где}$$

$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$, $z=ia$ — полюс второго порядка.

$$\underset{z=ia}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z-ia)^2}\right)=\lim_{z\to ia}\frac{i(z+ia)-2}{(z+ia)^3}e^{iz}=e^{-a}\frac{a+1}{4ia^3}\Rightarrow$$

$$I=\pi i\cdot e^{-a}\frac{a+1}{4ia^3}=\frac{\pi}{4a^3}e^{-a}(a+1).$$

6) $$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx=$$

$$=-\frac{i}{2}\cdot\pi i\,\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)-\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\,\underset{z=i}{\operatorname{res}} f(z),\ \text{где}\ f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}\cdot\frac{e^{iz}}{z}$$

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=-1 \qquad \left.\begin{matrix}z=0\\ z=i\end{matrix}\right\}\ \text{полюсы первого порядка}$$

$$\underset{z=i}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\frac{(z^2-1)e^{iz}/z}{2z}\right|_{z=i}=\left.\frac{(z^2-1)e^{iz}}{2z^2}\right|_{z=i}=e^{-1}\Rightarrow$$

$$I=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{e}.$$

7) $I_1=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$. Считаем, что $a>0,\ b>0$. $\Rightarrow$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=-\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx=$$

$$=-\frac{i}{2}\pi i\cdot\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)-\frac{i}{2}2\pi i\cdot\underset{z=ib}{\operatorname{res}} f(z),\ \text{где}\ f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$$

Здесь $z=0$ и $z=ib$ — полюсы первого порядка

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\frac{1}{b^2}$$

$$\underset{z=ib}{\operatorname{res}} f(z)=\left.\frac{e^{iaz}/z}{2z}\right|_{z=ib}=\left.\frac{e^{iaz}}{2z^2}\right|_{z=ib}=-\frac{e^{-ab}}{2b^2}\Rightarrow$$

$$I_1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{b^2}-\pi\frac{e^{-ab}}{2b^2}=\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}dx=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)^2}dx=$$

$$=-\frac{i}{2}\cdot\pi i\operatorname*{res}_{z=0}f(z)-\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=ib}f(z),\text{ где } f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)^2}$$

$z=0$ – полюс первого порядка, $z=ib$ – полюс второго порядка

$$\operatorname*{res}_{z=0}f(z)=\lim_{z\to 0}zf(z)=\frac{1}{b^4}$$

$$\operatorname*{res}_{z=ib}f(z)=\lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iaz}}{z(z+ib)^2}\right)=\lim_{z\to ib}e^{iaz}\frac{(iaz-1)(z+ib)-2z}{z^2(z+ib)^3}=$$

$$=-2ie^{-ab}\frac{b(ab+1)+b}{8ib^5}=-e^{-ab}\frac{ab+2}{4b^4}\Rightarrow$$

$$I_2=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{b^4}-\pi e^{-ab}\frac{ab+2}{4b^4}=\frac{\pi}{2b^4}\left(1-e^{-ab}\frac{ab+2}{2}\right)$$

9) $$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

для $a=b$ имеем

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname*{res}_{z=ia}f(z),\text{ где } f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$$

$z=ia$ – полюс второго порядка

$$\operatorname*{res}_{z=ia}f(z)=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}\right)=\lim_{z\to ia}e^{iz}\frac{i(z+ia)-2}{(z+ia)^3}=e^{-a}\frac{a+1}{4ia^3}\Rightarrow$$

$$I=\pi i e^{-a}\frac{a+1}{4ia^3}=\frac{\pi}{4a^3}e^{-a}(a+1)$$

для $a\neq b$ имеем

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=ia}f(z)+\operatorname*{res}_{z=ib}f(z)\right),\text{ где } f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

$z=ia$, $z=ib$ – полюсы первого порядка

$$\operatorname*{res}_{z=ia}f(z)=\left.\frac{e^{iz}/(z^2+b^2)}{2z}\right|_{z=ia}=\frac{e^{-a}}{(b^2-a^2)\cdot 2ia}$$

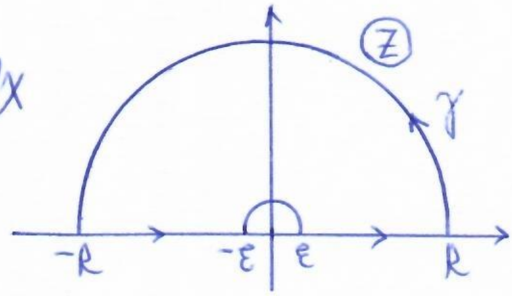
$$\underset{z=ib}{\mathrm{res}}\, f(z) = \frac{e^{iz}/(z^2+a^2)}{2z}\Bigg|_{z=ib} = -\frac{e^{-b}}{(b^2-a^2)2ib} \Rightarrow$$

$$I = \pi i\left(\frac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)} - \frac{e^{-b}}{2ib(b^2-a^2)}\right) = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).$$

4) $$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{z^2}$ в области $\{z\in\mathbb{C} : |z|<R,\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0\} \setminus \{z\in\mathbb{C} : |z|<\varepsilon,\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0\}$.

В этой области функция $f(z)$ является аналитической, поэтому



$$0 = \oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{1-e^{i2x}}{x^2}dx + \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}}\frac{1-e^{i2z}}{z^2}dz + \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}}\frac{1-e^{i2z}}{z^2}dz = I_1+I_2+I_3+I_4$$

Для интеграла I_3 имеем: $z=x+iy$ и

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}}\frac{|1-e^{i2z}|}{|z|^2}|dz| \leqslant \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\, z\geqslant 0}}\frac{1+e^{-2y}}{R^2}|dz| \leqslant \frac{2}{R}\int\limits_0^{\pi}d\varphi = \frac{2\pi}{R}$$

Значит, при $R\to+\infty$ интеграл I_3 стремится к нулю.

Для интеграла I_4 имеем:

$$I_4 = i\int\limits_{\pi}^{0}\frac{1-e^{i2\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{i2\varepsilon e^{i\varphi}}-1}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi =$$

$$= i\int\limits_0^{\pi}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(i2\varepsilon e^{i\varphi})^k}{k!}}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi = i\int\limits_0^{\pi}\left(2i + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2i)^k}{k!}(\varepsilon e^{i\varphi})^{k-1}\right)d\varphi =$$

$$= -2\pi + i\int\limits_0^{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2i)^k}{k!}(\varepsilon e^{i\varphi})^{k-1}d\varphi.$$

Значит, при $\varepsilon \to +0$ интеграл I_4 стремится к -2π.

При одновременном стремлении $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ находим

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{i2x}}{x^2}\,dx - 2\pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}.$$

5) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}\,dx =$$

$$= -\frac{3i}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3}\,dx + \frac{i}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^3}\,dx = -\frac{i}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3}\,dx$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{3e^{iz} - e^{i3z}}{z^3}$ в области

$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

В этой области функция $f(z)$ является аналитической, поэтому

$$0 = \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3}\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{3e^{iz} - e^{i3z}}{z^3}\,dz +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{3e^{iz} - e^{i3z}}{z^3}\,dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Интеграл I_3 по лемме Жордана при $R \to +\infty$ стремится к нулю.

Для интеграла I_4 имеем:

$$I_4 = i\int_{\pi}^{0} \frac{3e^{i\varepsilon e^{i\varphi}} - e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^3 e^{3i\varphi}}\,\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = -i\int_0^{\pi} \frac{3e^{i\varepsilon e^{i\varphi}} - e^{i3\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -i\int_0^{\pi} \frac{3(\cancel{1} + \cancel{i\varepsilon e^{i\varphi}} - \frac{1}{2!}\varepsilon^2 e^{2i\varphi} - \frac{1}{3!} i\varepsilon^3 e^{3i\varphi} + \ldots) - (\cancel{1} + \cancel{3i\varepsilon e^{i\varphi}} - \frac{1}{2!}9\varepsilon^2 e^{2i\varphi} - \frac{1}{3!} i\, 27\varepsilon^3 e^{3i\varphi} + \ldots)}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -i\int_0^{\pi} \left(\frac{-\frac{3}{2}\cancel{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}} + \frac{9}{2}\cancel{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}}{\cancel{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}} + \Phi_\varepsilon(\varphi) \right) d\varphi = -3\pi i - i\int_0^{\pi} \Phi_\varepsilon(\varphi)\,d\varphi$$

При каждом $\varphi \in [0,\pi]$ величина $\Phi_\varepsilon(\varphi)$ стремится к нулю для $\varepsilon \to +0$. Поэтому, при $\varepsilon \to +0$ интеграл I_4 стремится к $-3\pi i$.
При одновременном стремлении $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ находим

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3}\,dx - 3\pi i \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3}\,dx = 3\pi i \Rightarrow I = -\frac{i}{8}\cdot 3\pi i = \frac{3\pi}{8}.$$

8) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$. Считаем, что $a \neq b$ и $a>0, b>0$.

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\,dx$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ в области
$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
В этой области функция $f(z)$ является аналитической, поэтому

$$0 = \oint\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}\,dz +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \operatorname{Im} z\geq 0}} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}\,dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Интеграл I_3 по лемме Жордана при $R \to +\infty$ стремится к нулю.
Для интеграла I_4 имеем:

$$I_4 = i\int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{ia\varepsilon e^{i\varphi}} - e^{ib\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}\,\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = -i\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{ia\varepsilon e^{i\varphi}} - e^{ib\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -i\int\limits_0^{\pi} \frac{\left(ia\varepsilon e^{i\varphi} - \frac{1}{2!}a^2\varepsilon^2 e^{2i\varphi} + \ldots\right) - \left(ib\varepsilon e^{i\varphi} - \frac{1}{2!}b^2\varepsilon^2 e^{2i\varphi} + \ldots\right)}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= -(b-a)\pi - i\int\limits_0^{\pi} \Phi_\varepsilon(\varphi)\,d\varphi$$

При каждом $\varphi \in [0, \pi]$ величина $\Phi_\varepsilon(\varphi)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Поэтому, при $\varepsilon \to +0$ интеграл I_4 стремится к $-(b-a)\pi$. При одновременном стремлении $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ находим

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\,dx - (b-a)\pi \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\,dx = (b-a)\pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}(b-a).$$

11) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{x^4}\,dx = \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 - 4e^{i2x} + e^{i4x}}{x^4}\,dx$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{3 - 4e^{i2z} + e^{i4z}}{z^4}$ в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

В этой области функция $f(z)$ является аналитической, поэтому

$$0 = \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{3 - 4e^{i2x} + e^{i4x}}{x^4}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{3 - 4e^{2ix} + e^{i4x}}{x^4}\,dx +$$

$$+ \int_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{3 - 4e^{2iz} + e^{i4z}}{z^4}\,dz + \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{3 - 4e^{i2z} + e^{i4z}}{z^4}\,dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Интеграл I_3 по лемме Жордана при $R \to +\infty$ стремится к нулю. Для интеграла I_4 имеем:

$$I_4 = i\int_{\pi}^{0} \frac{3 - 4e^{i2\varepsilon e^{i\varphi}} + e^{i4\varepsilon e^{i\varphi}}}{\varepsilon^4 e^{4i\varphi}}\,\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -i\int_0^{\pi} \frac{\cancel{3} - 4(\cancel{1} + i2\varepsilon e^{i\varphi} - \frac{1}{\cancel{2!}}\cancel{4\varepsilon^2 e^{2i\varphi}} - \frac{1}{3!} i8\varepsilon^3 e^{3i\varphi} + \ldots) +}{\varepsilon^3 e^{3i\varphi}}$$

$$+\left(\cancel{1}+i4\varepsilon e^{i\varphi}-\cancel{\frac{1}{2!}16\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}-\frac{1}{3!}i64\varepsilon^3 e^{3i\varphi}+\ldots\right)d\varphi =$$

$$=-i\int_0^{\pi}\frac{-4i\varepsilon e^{i\varphi}-\frac{16}{3}i\varepsilon^3 e^{3i\varphi}+\ldots}{\varepsilon^3 e^{3i\varphi}}d\varphi=-\frac{4}{\varepsilon^2}\cancel{\int_0^{\pi}e^{-2i\varphi}d\varphi}^{\,0}-\frac{16}{3}\pi-i\int_0^{\pi}\Phi_\varepsilon(\varphi)d\varphi$$

При каждом $\varphi\in[0,\pi]$ величина $\Phi_\varepsilon(\varphi)$ стремится к нулю для $\varepsilon\to+0$. Поэтому, при $\varepsilon\to+0$ интеграл I_4 стремится к $-\frac{16}{3}\pi$.

При одновременном стремлении $R\to+\infty$ и $\varepsilon\to+0$ находим

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3-4e^{i2x}+e^{i4x}}{x^4}dx-\frac{16}{3}\pi \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3-4e^{i2x}+e^{i4x}}{x^4}dx=\frac{16}{3}\pi \Rightarrow I=\frac{\pi}{3}.$$